Integralidad de los modelos arco-circulares unitarios que son minimales

Francisco J. Soulignac[1,2,3] Pablo Terlisky[2,4]

[1]CONICET
[2]Departamento de Ciencia y Tecnología, Universidad Nacional de Quilmes
[3]Departamento de Computación, FCEN, Universidad de Buenos Aires
[4]Instituto de Cálculo, FCEN, Universidad de Buenos Aires

Un modelo *arco-circular propio* (PCA) es un par $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ donde C es un círculo y $\mathcal{A}$ es una familia finita de arcos de C tal que ningún arco incluye a otro arco. Si C contiene un punto 0 que no pertenece a ningún arco de $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{M}$ es un modelo *de intervalos propio* (PIG). Los modelos *arco-circular unitario* (UCA) y *de intervalos unitarios* (UIG) se corresponden a los modelos PCA y PIG cuyos arcos tienen todos la misma longitud, respectivamente. Dos modelos PCA son *equivalentes* cuando los extremos de sus arcos aparecen en el mismo orden en un recorrido del círculo.

Decimos que un modelo PIG $\mathcal{M}$ es (ℓ, d)-IG cuando todos los arcos tienen longitud $\ell > 0$ y todos los extremos están a distancia al menos $d > 0$. Reduciendo ℓ y d, podemos obtener un modelo (ℓ', d')-IG equivalente a $\mathcal{M}$, para cualquier $\ell' > 0$. Sin embargo, fijado el *umbral de separación* d, existe un valor mínimo ℓ' tal que $\mathcal{M}$ es equivalente a un modelo (ℓ', d)-IG. Pirlot [1] fortalece estas condiciones, estableciendo que un modelo (ℓ, d)-IG $\mathcal{M}$ es d-*minimal* cuando, para todo modelo (ℓ', d)-IG $\mathcal{M}'$ equivalente, ocurre que: 1. $\ell < \ell'$ y 2. $s_i < s'_i$ para todo $1 \leq i \leq n$, donde s_i (resp. s'_i) es la posición del i-ésimo extremo de $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{M}'$) desde 0. Pirlot demuestra que todo modelo PIG $\mathcal{M}$ es equivalente a modelo d-minimal $\mathcal{U}$ (que es único para d por definición). Más aún, si $d \in \mathbb{N}$, entonces el $\ell \in \mathbb{N}$ para el modelo d-minimal.

Recientemente Soulignac [2] adaptó el concepto de modelo minimal a los grafos UCA. En analogía a los modelos (ℓ, d)-IG, decimos que un modelo PCA $\mathcal{M}$ es (c, ℓ, d)-CA cuando el círculo tiene longitud $c > 0$, los arcos tienen longitud $\ell > 0$ y el *umbral* de separación entre extremos es $d > 0$. A diferencia de lo que ocurre en los modelos PIG, los modelos PCA no tienen un punto "inicial" 0 que no sea cruzado por ningún arco. En consecuencia, la condición 2. de la definición de modelo d-minimales de Pirlot no tiene sentido para grafos UCA. Su condición análoga, según Soulignac, consiste en minimizar la longitud del círculo. Es por este motivo que Soulignac establece que un modelo (c, ℓ, d)-CA es d-*minimal* cuando, para todo modelo (c', ℓ', d)-CA equivalente, ocurre que: 1. $\ell < \ell'$ y 2. $c < c'$. Soulignac demuestra que todo modelo UIG es equivalente a un modelo d-minimal, dejando como conjetura la integralidad de ℓ y c cuando $d \in \mathbb{N}$.

En esta charla presentamos distintos avances en la conjetura de integralidad. En particular, demostramos que ℓ es entero cuando d es entero. Como consecuencia de nuestro trabajo, obtenemos algoritmos más eficientes para resolver el problema de minimización de grafos UCA que consiste en encontrar un modelo d-minimal equivalente a un modelo UCA dado.

Referencias

[1] Pirlot, M. Minimal representation of a semiorder. *Theory and Decision 28*, 2 (1990), 109–141.

[2] Soulignac, F. J. Bounded, minimal, and short representations of unit interval and unit circular-arc graphs. *CoRR abs/1408.3443* (2014).